



TITLE:

局所凸空間に於ける二階線型常微分方程式 (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究)

AUTHOR(S):

小西, 芳雄; 手塚, 和男

CITATION:

小西, 芳雄 ...[et al]. 局所凸空間に於ける二階線型常微分方程式 (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究). 数理解析研究所講究録 1971, 121: 16-30

ISSUE DATE:

1971-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106487>

RIGHT:

局所凸空間に於ける 二階線型常微分方程式

東大理小西芳雄
東大理手塚和男

第1章 序文

作用素の半群の生成については, Hille-Yosida-Feller-Miyadera-Phillips の定理 及びその一般化として局所凸空間に於ける局所同等連続半群の生成に關する T. Komura の結果がある。

Sova, Fattorini 等は増大度が指数型の作用素の cosine function の生成を行い, 半群の場合と類似の生成定理を得た。

第1章では T. Komura の方法を用いれば, Sova, Fattorini の結果が更に一般の形で述べられることを示し, 半群に対し述べられている Trotter-Kato の収束定理と全く同様の収束定理が cosine function についても言える事を報告する。

第2章では収束定理により, 特に Banach 空間に於ける cosine function の生成作用素の摂動を述べる。近似についても考察し, 次に cosine function の生成作用素を係数

にもつ二階線型常微分方程式を調べる。

第1章

§1. 準備. 記号等は T. Komura [4] による。E は点列完備な局所凸空間とし、 α は正数とする。

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty, \alpha]} & \xrightarrow{A} & \mathcal{D}_{(-\infty, \alpha]} \xrightarrow{\hat{\varphi}} \text{"共役 Laplace 変換"} \\
 F \in \mathcal{D}'_{\alpha}(E) & \xrightarrow{A} & \mathcal{D}'_{\alpha}(E) \xrightarrow{\hat{F}} \supset 1 \otimes E \cong E \\
 \downarrow \frac{d}{dt} & \searrow \text{"一般 Laplace 変換"} & \downarrow \lambda \quad \downarrow A \\
 \mathcal{D}'_{\alpha}(E) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{\alpha}(E) \supset 1 \otimes E \cong E
 \end{array}$$

$(A\hat{F})(\hat{\varphi}) = A(\hat{F}(\varphi))$

定義. $T \in L(\mathcal{D}'_{\alpha}(E))$ 且つ H を E の部分空間とする。 $T(\lambda) : H \xrightarrow{\text{線型}} E$ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$) で $T(\lambda)x$ は各 $x \in H$ に対し $\operatorname{Re} \lambda > 0$ における E -値正則関数とする。 $T(\lambda)$ が H 上の T の表現とは、任意の $\mu > 0$ に対し

$$(T(1 \otimes x))(\hat{\varphi}) = \frac{1}{i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda) T(\lambda)x d\lambda \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{(-\infty, \alpha]},$$

$x \in H$ が成立するときいう。

定義. E に於ける線型作用素 A に対し、 $(A - \lambda)^{-1}$ (resp. $(A^2 - \lambda^2)^{-1}$) が存在して、 $L(\mathcal{D}'_{\alpha}(E))$ の元であるとき A の λ (resp. λ^2) に 関する一般 resolvent という。 E に於ける作用素の組 A, B に

対して $\lambda I (\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}$ が存在して, $L(D_\alpha(E))$ の元であるとき 組 A, B の一般 resolvent という。

§2. Cosine function の生成. 強連続な $L(E)$ -値関数 $S(\cdot)$ が cosine function であるとは, 次の "cosine property" をみたすことである。

$$(i) S(\lambda + t) + S(\lambda - t) = 2S(\lambda)S(t) \quad \forall t, \lambda \in \mathbb{R}^1;$$

$$(ii) S(0) = I.$$

S の生成作用素 A は次の様に定義される:

$$A = S''(0);$$

$$D(A) = \{x \in E; S(\cdot)x \in C^2(\mathbb{R}^1; E)\}.$$

これらの定義のもとで 次の T. Komura [4] 定理 3.3, 3.3' と類似の結果を得る。

定理 A E に於ける作用素 A が一意に決まる局所同等連続な cosine function の生成作用素である為の必要十分条件は次の (1), (2) である。

(1) A は閉作用素且つ稠密な定義域をもつ;

(2) 各 $\alpha > 0$ に対し 空間 $D_\alpha(E)$ に於いて 次の条件が成立:

(a) A の λ に関する一般 resolvent $(\lambda^2 - A)^{-1}$ が存在する。

(b) $\lambda (\lambda^2 - A)^{-1}$ は E 上の表現 $Q(\lambda)$ をもち 作用素族

$$\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} Q(\mu) : \mu > 0 \text{ 且 } n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

は $L(E)$ で同等連続である。

§3 二階の方程式 A を E の中の線型作用素, u を E -値の $[0, a]$ で定義された函数とする。

定義 (M. Sova [8])¹⁾ u が A に対する放物型問題の $[0, a]$ に於ける解であるとは次が成立することである:

- (i) $u \in C[0, a] \cap C^1(0, a)$;
- (ii) $u(t) \in D(A)$, $t \in (0, a)$;
- (iii) $u'(t) = Au(t)$, $t \in (0, a)$ 。

定義 (M. Sova [8]) A が $[0, a]$ で "parabolically determined" であるとは A に対する放物型問題の $[0, a]$ に於ける解 u で $u(0) = 0$ なるものは恒等的に 0 であることとする。

補題 次の (1), (2) が成立するでしょう。

(1) A は 閉かつ稠密な定義域をもつ作用素。

(2) 或る $a > 0$ に対し 空間 $ID_a(E)$ に於いて次の条件が成立:

(a) A の λ に関する一般 resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が存在する。

(b) $(\lambda - A)^{-1}$ は $D(A)$ 上の表現 $R(\lambda)$ をもち 作用素族

$$\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} R(\mu) : \mu > 0 \text{ 且つ } n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

は $L(D(A), E)$ で同等連続。又 $D(A)$ はグラフ位相により点列完備な局所凸空間とみなされている。

このとき

¹⁾ 以下の定義で M. Sova の原論文と多少異なる部分がある。

- (i) A は $[0, a]$ で "parabolically determined";
 (ii) $L(D(A), E)$ で 同等連続な作用素族 $\{T(t); 0 \leq t \leq a\}$ が存在し

- (a) 各 $x \in D(A)$ に対し $T(\cdot)x \in C[0, a]$ で $T(0)x = x$;
 (b) 各 $x \in D(A^2)$ に対し $T(\cdot)x \in C^1(0, a]$ で $T(t)x \in D(A)$,
 $t \in (0, a]$ 且 $\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$, $t \in (0, a]$.

次に A, B を E に於ける作用素, u を E -値の $[0, a]$ で定義された函数とする。

定義 (M. Sova [8]). u が 組 A, B に対する双曲型問題の $[0, a]$ に於ける解 であるとは次が成立することである:

- (i) $u \in C^1[0, a] \cap C^2(0, a]$;
 (ii) $u(t) \in D(A)$, $u'(t) \in D(B)$, $t \in (0, a]$;
 (iii) $u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0$, $t \in (0, a]$.

定義 (M. Sova [8]) 組 A, B が $[0, a]$ で "hyperbolically determined" であるとは 組 A, B に対する双曲型問題の $[0, a]$ に於ける解 u で $u(0) = u'(0) = 0$ なるものは恒等的に 0 であることとする。

定義 (M. Sova [8]) 組 A, B が closed とは次が成立することである。 $x_k \in D(A)$, $y_k \in D(B)$ ($k=1, 2, \dots$) $x_k \rightarrow x$ 且 $y_k \rightarrow y$ 且 $Ax_k + By_k \rightarrow z$ ($k \rightarrow \infty$) ならば " $x \in D(A)$, $y \in D(B)$ 且 $Ax + By = z$."

双曲型問題を一階化して補題を使うことにより, 次を得る。

定理 B. 次の (1), (2) が成立するしよう。

(1) 組 A, B は *biclosed* 且つ 稠密な定義域 $D(A), D(B)$ を持つ。

(2) 或る $a > 0$ に対し 空間 $D_a(E)$ において 次の条件が成立：

(a) 組 A, B の一般 *resolvent* $(\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}$ が存在し

$(\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}(\lambda + B)$ は *closable* で $\overline{(\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}(\lambda + B)}$ は $L(D_a(E))$ の元である。

(b) $(\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}$ と $\overline{(\lambda^2 + \lambda B + A)^{-1}(\lambda + B)}$ は E 上の表現 $R_1(\lambda)$ と $R_2(\lambda)$ をそれぞれもち 作用素族

$$\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} R_i(\mu) ; \mu > 0 \text{ 且 } n=0, 1, 2, \dots \right\}$$

$i=1, 2$, は $L(E)$ で 同等連続。

このとき

(i) 組 A, B は $[0, a]$ で *hyperbolically determined* ;

(ii) $Ax + By \in D(B)$ なる 各 $x \in D(A)$ と $y \in D(A) \cap D(B)$ に対し 組 A, B に対する双曲型問題の $[0, a]$ に於ける解 u が存在し

$$u(0) = x, \quad u'(0) = y.$$

更に任意の連続 *semi-norm* ρ に対し 或る (x, y, u) 及び t に 無関係な) 連続 *semi-norm* φ が存在し

$$\rho(u(t)) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\rho(u'(t)) \leq \varphi(y) + \varphi(Ax + By) \quad 0 \leq t \leq a.$$

§4. Cosine function の収束

定理C $\{S^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ を局所同等連続な cosine function の列とし
次の"安定性"の条件をみたすものとする: 各連続 semi-norm
 p に対し 或る連続 semi-norm φ が存在して

$$p(S^{(k)}(t)x) \leq \varphi(x), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq a,$$

$x \in E$. $\{Q^{(k)}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ を次の様な $(\lambda^2 - A^{(k)})^{-1}$ ($k=0, 1, 2, \dots$)
の E 上の表現の列とする.

$$Q^{(k)}(\lambda) = \int_0^a e^{\lambda t} S^{(k)}(t) dt,$$

ここに $A^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) は $S^{(k)}$ の生成作用素とする.

このとき

各 $x \in E$ に対し \mathbb{R}^1 の compact 集合上で一様に $S^{(k)}(t)x$
が $S^{(0)}(t)x$ に収束する為の必要十分条件は \mathbb{C}^1 の右半平面の
 λ と各 $x \in E$ に対し

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q^{(k)}(\lambda)x = Q^{(0)}(\lambda)x. \quad \text{定理の}$$

特に同等連続半群に対する Trotter-Kato の類似として

定理D. $\{S^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ を同等連続な cosine function の列で
次の"安定性"の条件をみたすものとする: 各連続 semi-norm
 p に対し 或る連続 semi-norm φ が存在して

$$p(S^{(k)}(t)x) \leq \varphi(x), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t, \quad x \in E.$$

$A^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) を $S^{(k)}$ の生成作用素としよう.

もし 或る λ_0 ($\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$) に対し

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_0^2 - A^{(k)})^{-1} x = J(\lambda_0)x, \quad \forall x \in E$$

が存在し $R(J(\lambda_0^2))$ が E で稠密ならば $J(\lambda_0^2)$ は或る同等連続 cosine function S の生成作用素 A の resolvent: $J(\lambda_0^2) = (\lambda_0^2 - A)^{-1}$ であり

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^{(k)}(t)x = S(t)x$$

が各 $x \in E$ に対し成立する。

更にこの収束は R' の compact 集合上一様である。

Remark. この定理を使って H.F. Trotter [9] Theorem 5.2 と類似の定理を cosine function に対してもいえる。また M. Hasegawa [3], S. Oharu [6] と同様の議論が成立し類似の定理を得る。

§5. 定理 A の証明の方針

<必要性> $Q\hat{F} = (F * S)^\wedge$, $\hat{F} \in D'_a(E)$ とおくと

$Q \in L(D'_a(E))$ で $\lambda(\lambda^2 - A)^{-1} = Q$ をみたく。又

$Q(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda^2 t} S(t) dt$ とおけば、 Q の E 上の表現である。

<十分性> $S(t)x = Y(t)x + \frac{t^2}{2!} Y(t)Ax + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{t\lambda} \frac{1}{\lambda^2} Q(\lambda) A x d\lambda$
 $x \in D(A^2)$, $t \leq a$, $\mu > 0$ とおき、 E 全体に拡張し

次に $\{S(t) : 0 \leq t \leq \frac{a}{2}\}$ が cosine property をもつことを示す。その後これを R' 全体に拡張すればよい。

第2章

この章では Banach 空間における cosine function のいくつかの性質を考察する。

§1 generator の振動

以下 E を Banach 空間, $R = (-\infty, \infty)$

$L(E) = \{A: E \rightarrow E \text{ 有界}\}$, $L^1(E) = \{A: E \supset D(A) \rightarrow E \text{ 線型}\}$

とする。 S を型 ω の cosine function (i.e. $\exists M$ s.t.

$\|S(t)\| \leq M e^{\omega|t|}$) とし, A をその generator とする。この時

A の分数中を $\hat{A}_\alpha = e^{\alpha\pi i} (\omega^2 + 1 - A)^\alpha$ で定義すると

命題 $T(t)x = \int_0^t S(s)x ds$, $0 < t < 1/2$ の時

$\hat{A}_{1/2-\varepsilon} T(t) \in L(E)$, t に依りて強連続

定義 $\hat{A}_{1/2} T(t) \in L(E)$, t に依りて強連続の時

cosine function S は regular であるという。

Hilbert 空間あるいは $L^p(X)$ ($1 < p < \infty$) の中の cosine function はすべて regular であることが知られている。

(Fattorini [2])

さて次の補題から generator に有界作用素を加えても generator であることがわかる。

補題 A cosine function S の generator

$B \in L(E)$ ならば

$A+B$ も cosine function の generator, 所以て

その cosine function を S_{A+B} と書く

$$S_{A+B}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \quad (\text{収束は } \mathbb{R} \text{ 上 } \| \cdot \|_{L(E)} \text{ で "広義-様"})$$

$$\text{但し } S_0(t) = S(t), \quad S_{n+1}(t)x = \int_0^t S_n(t-s) B T(s)x ds \quad (n \geq 0)$$

$$T(t)x = \int_0^t S(s)x ds$$

上の補題と第1章で述べた Trotter-Kato 型の収束定理が成立することから Miyadera [5] と全く同様にして次の定理を証明できる。

定理 A cosine function S の generator

$$T(t)x = \int_0^t S(s)x ds$$

$$B_n \in L(E) \quad n=1,2,\dots \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ に對し } (B_n)x \rightarrow Bx$$

$$\exists \lambda_0 > 0 \text{ s.t. } \gamma_{\lambda_0} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{n \geq 1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_0 t} \|B_n T(t)x\| dt < \infty$$

この時 $\delta_0 = (\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma_{\lambda})^{-1} \in (0, \infty]$ とおく

$|\delta| < \delta_0$ で $A + \delta B$ は cosine function の generator である。

この定理のいくつかの系を述べよう。

系1 A cosine function の generator の時

(i) B closable $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$) ならば

$A+B$ は cosine function の generator

(ii) B non-negative $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ならば

$A+B^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ は cosine function の generator

系 1 の証明中から A が regular cosine function の generator の時は (i) で $\varepsilon = 0$ としてもよい。従ってとくに Hilbert 空間においては次のことがいえる。

系 2 H Hilbert 空間

$L : H \rightarrow H$ 自己共役, ≥ 0 の時

(i) B closable, $\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(L^{\frac{1}{2}})$ ならば

$-L + B$ は cosine function の generator である。

(ii) B maximal accretive, $\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(L)$ ならば

$-L + B^\alpha$ ($0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$) および $-L + B^{*\beta}$ ($0 < \beta < \frac{1}{2}$) は cosine function の generator である。

例 $\Omega : \mathbb{R}^n$ の有界領域 $\partial\Omega$ などの p integer ≥ 1

$$A = (-1)^{p+1} \Delta^p \quad \mathfrak{D}(A) = \mathcal{H}_{2p}^{(\Omega)} \cap \mathcal{H}_p^0(\Omega)$$

$$B = \sum_{|\gamma| \leq p} b_\gamma D^\gamma \quad b_\gamma \in L^\infty(\Omega)$$

$A+B$ は $H = L^2(\Omega)$ の中の cosine function の generator。

系 3 A : cosine function S の generator

$$T(t)x = \int_0^t S(s)x ds$$

$$B : \mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(A), \exists \lambda \in \mathfrak{R}(A) \quad B(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

$$\int_0^1 \|BS(t)x\| dt \leq K \|x\|_{\mathfrak{D}(\hat{A}_{K-\varepsilon})} = K \|\hat{A}_{K-\varepsilon} x\| \quad \forall x \in \mathfrak{D}(A)$$

$$\int_0^1 \|BT(t)y\| dt \leq K \|y\| \quad \forall y \in \mathfrak{D}(A)$$

この時 ある $\delta_0 \in (0, \infty)$ があって $|\delta| < \delta_0$ で $A + \delta B$ は

cosine function の generator とする。とくに A regular の時 $\varepsilon=0$ にできる。

§ 2 近似

考える問題は次のようなものである。

cosine function S とその generator A が与えられた時次の性質を持つ $\{A_n\} \subset L(E)$ を見出すこと。

$$(i) \quad A_n x \rightarrow Ax \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{for } \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

$$(ii) \quad S_{A_n}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} A_n^p \rightarrow S(t) \quad R^2 \text{ 広義-様に強収束}$$

$$\text{即ち } \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = A_n u \\ u(0) = x \quad u'(0) = y \end{cases} \quad (x, y \in E)$$

の解 $U_n(t)$ が $S(t)x$ に 広義-様に収束する。 ($\forall x$ について)

つまり半群の理論における Yosida 近似 (i.e. A が半群の generator の時は $A_n = nA(n-A)^{-1}$) に相当するものが得られるかという問題である。この問題は現在のところ私達にはわからない。しかし少なくとも次のことはいえそうである。

$\{A_n\}, \{B_n\} \subset L(E)$ を適当に決めて次のようにできる。

$$(i) \quad A_n x \rightarrow Ax, \quad B_n x \rightarrow 0 \quad \text{for } \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - B_n\right)^2 u = A_n u \\ u(0) = x \quad u'(0) = y \end{cases} \quad x, y \in E$$

の解を $U_n(t; x, y)$ とすると $t \geq 0$ で"広義"様に $n \rightarrow \infty$ の時

$$U_n(t; x, y) \rightarrow S(t)x + \int_0^t S(t-s)y ds$$

注意 $S(t)$ contraction の時 $\|U_n(t; x, 0)\| \leq \|x\|$
($t \geq 0$)

§ 3 2 階の方程式

$A \in \text{cosine function の generator とする時 Sova [8] は}$

$C \in L(E)$ ならば $\frac{d^2 u}{dt^2} = C \frac{du}{dt} + Au$ に対する Cauchy

問題が R で"一様に適切"であることを示した。従って § 1

で述べたことから B closable $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ ($0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$)

の時 $\frac{d^2 u}{dt^2} = C \frac{du}{dt} + (B+A)u$ に対する Cauchy 問題は R

で"一様に適切"である。ここでは B, C が t による場合を考

える。以下 $\mathcal{D}(\hat{A}_\alpha)$ と書くと $\|x\|_{\mathcal{D}(\hat{A}_\alpha)} = \|\hat{A}_\alpha x\|$ (\hat{A}_α invertible)

によって Banach 空間の構造が入っているものとみえる。

定理 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

A cosine function の generator

$B(t)$ closable, $\mathcal{D}(B(t)) \supset \mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}-\varepsilon})$

$[0, T] \ni t$ に関して $\mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 上で"強連続

" $\mathcal{D}(A)$ 上で"強連続微分可能

$C(t) \in L(E)$ $[0, T] \ni t$ に関して 強連続

" $\mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}-\varepsilon})$ 上で"強連続微分可能

$f \in C^1([0, T], E)$

この時 $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ に対して

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = C(t) \frac{du}{dt} + (B(t) + A)u + f(t) \\ u(0) = x, \quad u'(0) = y \end{cases}$$

は $u \in C^2([0, T], E) \cap C^1([0, T], \mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}-\varepsilon})) \cap C([0, T], \mathcal{D}(A))$

なる解 ε -意的に持ち

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(\hat{A}_{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \times C^1([0, T], E) &\longrightarrow C^2([0, T], E) \\ (x, y, f) &\longmapsto u \end{aligned}$$

は連続である。

注意 A regular cosine function の generator の時
定理 2" $\varepsilon=0$ にできる。

文 献

- [1] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces, I, J. Differential Equations 5 (1969), 72-105.
- [2] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces, II, J. Differential Equations 6 (1969), 50-70.
- [3] M. Hasegawa, A note on the convergence of semi-groups of operators, Proc. Japan Acad. 40 (1964), 262-266.

- [4] T. Kōmura, Semigroups of operators in locally convex spaces, *J. Functional Analysis* 2 (1968), 258-296.
- [5] I. Miyadera, On perturbation theory for semi-groups of operators, *Tōhoku Math. Jour.* 18 (1966), 299-310.
- [6] S. Ōharu, On the convergence of semi-groups of operators, *Proc. Japan Acad.* 42 (1966), 880-884.
- [7] M. Sova, Cosine operator functions, *Rozprawy Matematyczne XLIX* (1966), 3-46.
- [8] M. Sova, Problème de Cauchy pour équations hyperboliques opérationnelles à coefficients constants non-bornés, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 22 (1968) 67-100.
- [9] H.F. Trotter, Approximation of semi-groups of operators, *Pacific J. Math.* 8 (1958), 887-919.
- [10] K. Yosida, On holomorphic Markov Processes, *Proc. Japan Acad.* 42 (1966), 313-317.